Kurvendiskussion Anleitung

Als ersten Schritt bilden wir zunächst die ersten drei Ableitungen der zu diskutierenden Funktion:

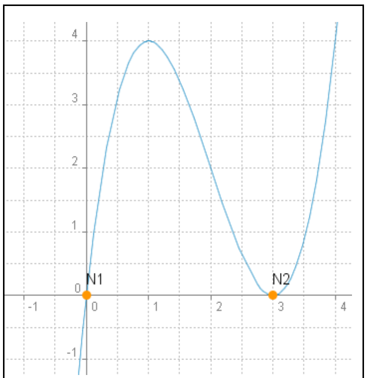

Abbildung 1: Nullstellen

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	Koordinaten der Punkte
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$	Steigungen der Tangenten
$f''(x) = 6x - 12$	Krümmungen
$f'''(x) = 6$	Krümmungsänderungen

1.) **Nullstellen f(x) = 0**

Nullstellen liegen direkt auf der x-Achse. Ihre y-Werte sind 0. Aus diesem Grund setzen wir die gegebene Funktion gleich Null:

$f(x) = 0$

$x^3 - 6x^2 + 9x = 0$ Um diese Gleichung lösen zu können, heben wir x heraus

$x(x^2 - 6x + 9) = 0$ Nun können wir die erste Lösung direkt ablesen: $\underline{x_1=0}$ und dividieren die gesamte Gleichung durch x.

$x^2 - 6x + 9 = 0$ Übrig bleibt eine quadratische Gleichung, deren Ergebnisse wir mit der kleinen Lösungsformel berechnen

$$x_{2,3} = \frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 9}$$

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-9}$$

$$x_{2,3} = 3 \pm 0$$

Daraus folgt, dass es nur eine weitere Nullstelle gibt:

$$x_2 = 3$$

Unsere Funktion besitzt also 2 Nullstellen, an der Stelle $x_1 = 0$ und an der Stelle $x_2 = 3$. Unsere Nullpunkte haben demnach folgende Koordinaten: $N_1(0|0)$ und $N_2(3|0)$

2.) **Extremstellen f'(x) = 0**

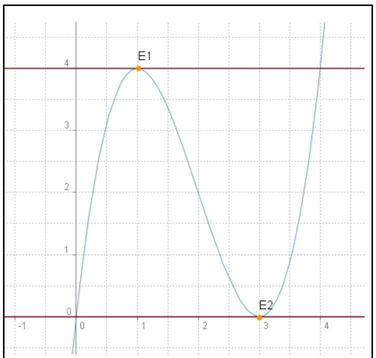

Abb.2: Extremstellen mit waagrechten Tangenten

Extremstellen sind Stellen mit waagrechten Tangenten. D.h. die Steigung der Tangenten ist hier 0. Da man durch die erste Ableitung, die Steigungen der Tangenten erhält, müssen wir infolgedessen die erste Ableitung gleich Null setzen:

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 12x + 9 = 0$ | :3

$x^2 - 4x + 3 = 0$ mit Hilfe der kleinen Lösungsformel erhalten wir:

$x_3 = 1$ und $x_4 = 3$ also zwei Extremstellen.

Welche dieser beiden Extremstellen der Hochpunkt und welche der Tiefpunkt ist, klären wir mit Hilfe der Krümmungen. Siehe Abbildung 3 auf der nächste Seite.

Krümmungen berechnen wir mit der zweiten Ableitung. Deshalb setzen wir jetzt unsere zwei soeben berechneten Extremstellen in die zweite Ableitung ein und erhalten die Krümmung an der jeweiligen Stelle:

Für $x = 1$:
$f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6$ negative Krümmung
Daraus folgt: an der Stelle $x = 1$ besitzt die Kurve einen Hochpunkt.
mit $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$ erhalten wir die dazugehörige y-Koordinate und unseren Hochpunkt H(1|4)

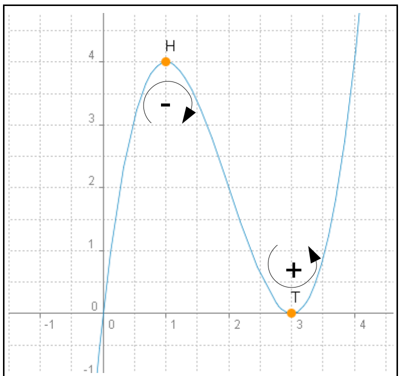

Abbildung 3: Positive und negative Krümmung

Das selbe Prozedere mit der zweiten Extremstelle $x = 3$:
$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6$ positive Krümmung, also ein Tiefpunkt.
$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$ der Nullpunkt N_2 ist folglich gleichzeitig der Tiefpunkt T(3|0)

3.) **Wendestellen $f''(x) = 0$**

Stellt man sich den Graphen als Straße vor, auf dem ein Auto fährt, so ist die Lenkung im Wendepunkt geradeaus gerichtet.
Das bedeutet wiederum, dass wir im Wendepunkt keine Krümmung haben.

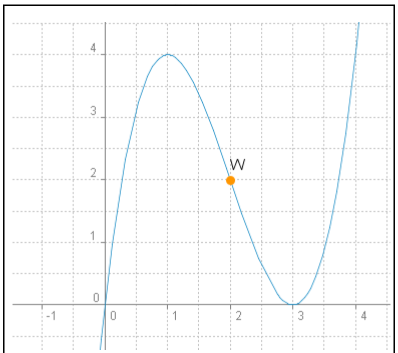

Abbildung 4: Wendepunkt

$f''(X) = 0$
$6x - 12 = 0 \quad |+12$
$6x = 12 \quad |:6$
$x = 2$

An der Stelle $x = 2$ besitzt der Graph vermutlich einen Wendepunkt. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn auch eine Krümmungsänderung vorliegt. D.h nach dem Wendepunkt schlagen wir das Lenkrad in eine andere Richtung ein als vor dem Wendepunkt.
Ob eine Krümmungsänderung vorliegt, klären wir mit der dritten Ableitung und setzen jetzt unsere vermutliche Wendestelle $x = 2$ in diese ein.

$f'''(2) = 6 \neq 0$ Es liegt eine Krümmungsänderung vor, daher handelt es sich hier tatsächlich um einen Wendepunkt.

mit $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 2$ erhalten wir auch wieder die dazugehörige y-Koordinate und unseren Wendepunkt W(2|2).

4.) **Wendetangente $y = kx + d$**

Als letztes berechnen wir die Tangente in unserem Wendepunkt. Die allgemeine Geradengleichung lautet: $y = kx + d$, wobei k für die Steigung der Geraden steht.
Die Steigung unserer Wendetangente berechnen wir wieder mit der ersten Ableitung an der Stelle unseres Wendepunktes, nämlich $x = 2$.
$k = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3$
mit $x = 2$ und $y = 2$ aus dem Wendepunkt W(2|2) in die Geradengleichung eingesetzt, erhalten wir:
$2 = -3 \cdot 2 + d \rightarrow d = 8$
k und d in die Geradengleichung eingesetzt ergibt:
$t_w: y = -3x + 8$

Zeichnet man nun Nullstellen, Extremstellen und Wendepunkt in ein Koordinatensystem ein erhält man diesen Funktionsgraphen: